EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

Varianta ….**086**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

Se consideră mulțimea M formată din punctele $A(1,1), B(1,-1), C(-1,2)$ și O(0,0).

(4p) **a)** Să se calculeze lungimea segmentului $[OC]$.

(4p) **b)** Să se calculeze aria triunghiului ABC.

(4p) **c)** Să se determine raza cercului de ecuație $x^2+y^2=2$.

(4p) **d)** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un punct din mulțimea M acesta să aparțină cercului de ecuație $x^2+y^2=2$.

(2p) **e)** Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$.

(2p) **f)** Să se calculeze partea reală a numărului complex $(1+2i)^2$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se rezolve în **R** ecuația $2^{x^2+x}=4$.

(3p) **b)** Să se calculeze a_7, dacă în progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_1=1$ și $a_3=5$.

(3p) **c)** Să se calculeze $C_7^5-C_7^2$.

(3p) **d)** Să se arate că numărul $a=\log_2\frac{1}{4}+\log_2 8$ este natural.

(3p) **e)** Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului $X^4-2X^3+3X^2-4X+a$ la polinomul $X-1$ să fie 2.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\frac{x}{e^x},\ \forall\ x\in\mathbf{R}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției f.

(3p) **c)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției f.

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_0^1 f(-x)dx$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $B=A-I_3$.

(4p) **a)** Să se demonstreze că $\det(A)=\det(B)$.

(4p) **b)** Să se calculeze rangurile matricelor A şi B.

(4p) **c)** Să se calculeze B^2 şi B^3.

(2p) **d)** Să se demonstreze, folosind metoda inducției matematice, că

$$A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}\ \forall n\in\mathbf{N}^*.$$

(2p) **e)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$ astfel încât $A^2=I_3+a\cdot B+b\cdot B^2$.

(2p) **f)** Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$, există $k\in\mathbf{N}$ astfel încât $A^n=I_3+B+B^2+...+B^k$.

(2p) **g)** Se consideră $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$. Să se demonstreze că *nu există* $p\in\mathbf{N}$ astfel încât $A+A^2+...+A^n=I_3+B+B^2+...+B^p$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f_k:\left(-\frac{e}{k},\infty\right)\to\mathbf{R}$, $f_k(x)=\ln(e+kx)$, unde $k\in\mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f_k'(x)$, $x\in\left(-\frac{e}{k},\infty\right)$.

(4p) **b)** Să se demonstreze că $\lim\limits_{x\to 0}f_k(x)=1,\ \forall k\in\mathbf{N}^*$.

(4p) **c)** Să se demonstreze că $1-ab=1-a+a(1-b),\forall a,b\in\mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se demonstreze că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f_k(x)-1}{x}=\frac{k}{e},\ \forall k\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-f_1(x)f_2(x)}{x}=-\frac{3}{e}$.

(2p) **f)** Să se demonstreze că dacă $n\in\mathbf{N}^*$ şi $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbf{R}$, atunci

$$1-a_1a_2...a_n=1-a_1+a_1(1-a_2)+a_1a_2(1-a_3)+...+a_1a_2...a_{n-1}(1-a_n).$$

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\ln(e+x)\ln(e+2x)...\ln(e+nx)}{x}$, unde $n\in\mathbf{N}^*$.